M1
2006-2007
Mathématiques

Analyse fonctionnelle et EDP TD n^{o}5
Espaces de Hilbert

Exercice 1. Soit $\mathcal{H}$ un espace pré-hilbertien **réel**.
a) Montrer l'égalité de polarisation sur $\mathcal{H}$

$$(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

b) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $\forall x \in \mathcal{H}$, $\|f(x)\| = \|x\|$. Montrer $\forall x, y \in \mathcal{H}$, $\big(f(x)|f(y)\big) = \big(x|y\big)$.
c) On suppose maintenant que $\mathcal{H}$ est un espace pré-hilbertien **complexe**. Montrer l'égalité de polarisation complexe sur $\mathcal{H}$

$$(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right),$$

et en déduire comme dans le cas réel le résultat de la question **b**.

Dans la suite, on désigne par $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel ou complexe, $\|\cdot\|$ la norme et $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire sur $\mathcal{H}$.

Exercice 2.
a) Soit $(x_n)_n$ une suite de $\mathcal{H}$ et $x \in \mathcal{H}$ tels que
(1) $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|$.
(2) $\forall y \in \mathcal{H}$, $\lim_{n\to+\infty} (x_n|y) = (x|y)$.

En étudiant $\|x_n - x\|^2$, montrer que x_n tend vers x.
b) On suppose que $\mathcal{H}$ est séparable, c'est à dire qu'il admet une base hilbertienne (une famille othonormale complète) dénombrable $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Montrer que la condition (2) peut-être remplacée par la condition moins forte
(2') $\forall j \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} (x_n|e_j) = (x|e_j)$.

Exercice 3. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base Hilbertienne de $\mathcal{H}$.
a) Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$ converge si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 < \infty$.
b) En considérant $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} e_n$, montrer que la base hilbertienne $(e_n)_n$ n'est pas une base algébrique.

Exercice 4. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$.
a) Soit F un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$, et P_F la projection sur le convexe fermé F. Montrer que $P_F \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et calculer sa norme. Montrer que si $x \in \mathcal{H}$, $y \in F$, $(P_F x - x|y) = 0$.
b) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:
(1) F est fermé.
(2) $H = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$.
(3) $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

On remarque que l'opérateur P_F de la question précédente est la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$ (ou projection ortogonale sur F), qui existe grâce à la condition (2).
c) Montrer que F est dense dans $\mathcal{H}$ si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$.

Exercice 5.
a) Soit $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un projecteur (i.e. $P^2 = P$). Montrer que P est un projecteur orthogonal (sur un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$) si et seulement $\|P\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 1$.
b) Montrer que si P est un tel projecteur orthogonal, alors

$$(Pu|v) = (u|Pv) = (Pu|Pv).$$

c) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels fermés de $\mathcal{H}$ et P_F, P_G les projections orthogonales sur F et G. Montrer

$$P_F \circ P_G = P_G \circ P_F = P_{F\cap G}.$$

Exercice 6. On note $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ l'espace de Hilbert des suites complexes de carré sommable. Soit

$$\mathfrak{h}^1 := \left\{ u \in \ell^2,\ \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

a) Montrer que $\mathfrak{h}^1$, muni du produit scalaire

$$(u|v)_{\mathfrak{h}^1} := \sum_{n=0}^{+\infty} (1+n^2) u_n \overline{v}_n$$

est un espace de Hilbert.

b) Montrer que $\mathfrak{h}^1$ est un sous-espace dense de ℓ^2.

c) Montrer que la boule unité fermée de $\mathfrak{h}^1$ est un compact de ℓ^2.

Exercice 7. Exemples de projections sur des convexes fermés.

a) Soient $y_0 \in \mathcal{H}$. Expliciter la projection orthogonale sur la boule fermée de centre y_0 et de rayon $R > 0$.

b) Soit $y_0 \in \mathcal{H}$. Expliciter la projection orthogonale sur la droite $(0, y_0)$, puis sur le segment $[0, y_0] = \{ty_0,\ t \in [0,1]\}$.

c) Soit $\mathcal{H} = \ell^2$ et $C := \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2,\ |\forall n \geq 0,\ |u_n| \leq 1\}$. Montrer que C est un convexe fermé et expliciter la projection orthogonale sur C.

Exercice 8. Soient C_1, C_2 deux convexes fermés non vides de $\mathcal{H}$ tels que

$$C_1 \subset C_2.$$

Soit $x \in \mathcal{H}$. Pourquoi a-t-on $P_{C_2}(P_{C_1}(x)) = P_{C_1}(x)$? Montrer que si C_1 et C_2 sont de plus des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{H}$, on a $P_{C_1}(P_{C_2}(x)) = P_{C_1}(x)$. Montrer en donnant un exemple en dimension 2 d'espace que cette propriété n'est pas toujours vraie dans le cas général.

Exercice 9. Soit C un convexe fermé de $\mathcal{H}$. Montrer que la projection sur C est 1-lipschitzienne.

Exercice 10. Suites monotones de convexes fermés. Si C est un convexe fermé non-vide d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ (réel ou complexe), on désigne par P_C la projection sur C. On pose, pour $u \in \mathcal{H}$,

$$d(u, C) := \inf_{v\in C} \|u - v\|.$$

a) L'infimum est-il atteint? Montrer pour $u, v \in \mathcal{H}$

$$d(u, C) = 0 \iff u \in C$$
$$d(u, C) \leq d(v, C) + d(u, v).$$

b) Soient C_1 et C_2 deux convexes fermés non-vides et $u \in \mathcal{H}$. Montrer que si $C_1 \subset C_2$,

$$\|P_{C_1}(u) - P_{C_2}(u)\|^2 \leq d(u, C_1)^2 - d(u, C_2)^2.$$

c) Soit $(C_n)_n$ une suite **croissante** de convexes fermés non vides de $\mathcal{H}$ et C l'adhérence de leur réunion. Démontrer que C est un convexe fermé non vide puis, si $u \in \mathcal{H}$

$$\lim_{n\to+\infty} d(u, C_n) = d(u, C), \text{ puis } \lim_{n\to+\infty} P_{C_n}(u) = P_C(u).$$

d) Soit $(D_n)_n$ une suite **décroissante** de convexes fermés non vides de $\mathcal{H}$ et D leur intersection. Démontrer que D est un convexe fermé. Puis

$$\lim_{n\to+\infty} P_{D_n}(u) = P_D(u) \textbf{ si } D \textbf{ est non vide}$$
$$\lim_{n\to+\infty} d(u, D_n) = +\infty \textbf{ si } D \textbf{ est vide}.$$

Indication: en utilisant la question (b), *on pourra montrer que si* $(d(u, D_n))_n$ *converge, la suite* $\left(P_{D_n}(u)\right)_n$ *est de Cauchy.*